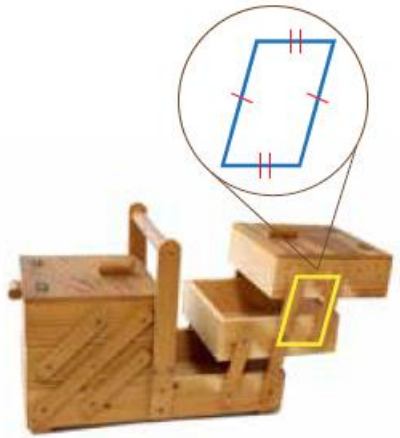
الدرسُ 3 تمييزُ متوازي الأضلاعِ

فكرةُ الدرسِ

أتعرّفُ الشروطَ الّتي تؤكّدُ أنَّ شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاعٍ.

أستكشفُ

هَلْ تبقى رفوفُ الصُّندوقِ موازيةً لبعضِها بعضًا بغضِّ النظرِ عَنْ موقعها؟ أبرّرُ إجابتي.



متوازي الأضلاع شكل رباعي تميزه عن غيره من الأشكال الرباعية

أن أحافظ على خصائصه

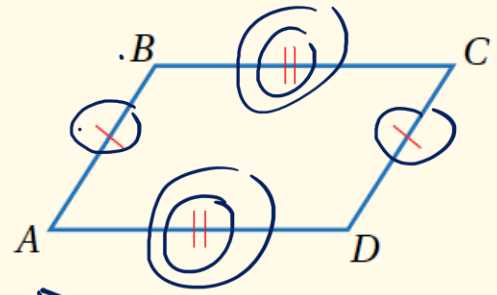
نظريات

شروطُ متوازي الأضلاعِ (1)

- عكسُ نظريةِ الأضلاعِ المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ

إذا كانَ كلُّ ضلعَيــنِ متقابلَينِ متطابقَينِ في الشــكلِ الرباعيِّ، فإنَّ الشــكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ.

مثالٌ: إذا كانَ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ ، فإنَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$
$\overline{BC} \cong \overline{AD}$ ⟩ ⟹ متوازي أضلاع

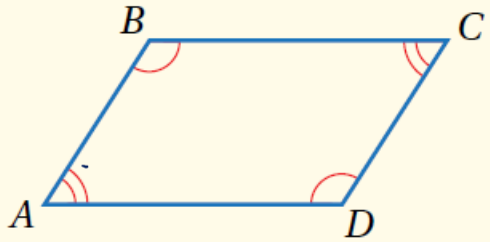
النظرية : متوازي الأضلاع ← نظرية ← خصائص (كل ضلعين متقابلين متطابقين)
(كل زاويتين متقابلتين متطابقتين)

عكس النظرية : خصائص ← عكس النظرية ← متوازي أضلاع

(ما يحكي عن متوازي أضلاع يسمى عن أضلاع وزوايا)

- **عكسُ نظريةِ الزوايا المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ**

إذا كانَتْ كلُّ زاويتَينِ متقابلتَينِ متطابقتانِ في الشكلِ الرباعيِّ، فإنَّ الشكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ.



مثالٌ: إذا كانَ $\angle D \cong \angle B$, $\angle C \cong \angle A$، فإنَّ الشكلَ الرباعيَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.

$\angle A \cong \angle C$
$\angle B \cong \angle D$
← متوازي أضلاع

عكس النظرية: خصائص المتوازي أضلاع ← النتيجة

(كل زاويتين متقابلتين متطابقتين)

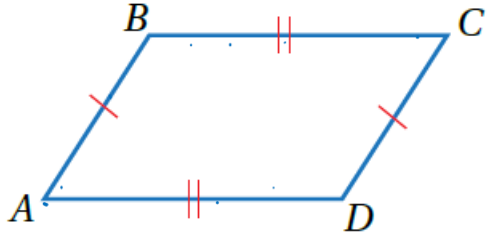
$\angle A \cong \angle C$
$\angle B \cong \angle D$

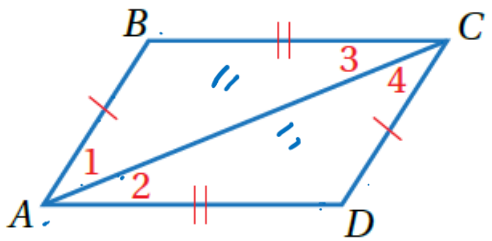
وإذا ما هي النظرية الأساسية؟

خصائص متوازي أضلاع ← (كل زاويتين متقابلتين متطابقتين)

مثال 1: إثباتُ نظريةٍ

في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، فأثبتُ أنَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.





الخُطوةُ 1 أرسمُ القُطرَ $\overline{AC}$ ، لينتجَ ΔABC وَ ΔCDA

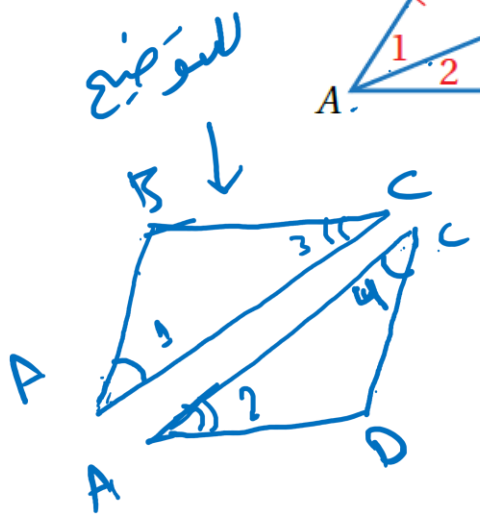
الخُطوةُ 2 أستعملُ حالةَ تطابقِ مثلثَينِ بثلاثةِ أضلاعٍ (SSS)؛ لأثبتَ أنَّ

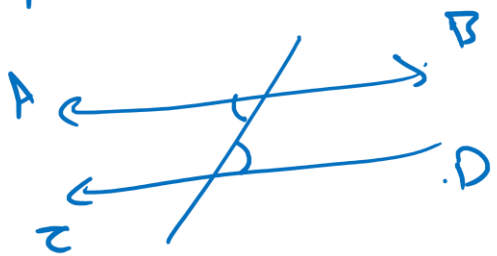
$\Delta ABC \cong \Delta CDA$

الخُطوةُ 3 أستعملُ الزوايا المتبادلةَ داخليًّا؛ لأثبتَ أنَّ الأضلاعَ المتقابلةَ متوازيةٌ

البرهان:

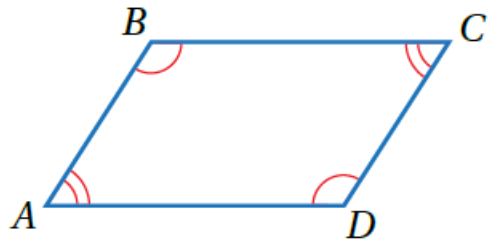
العباراتُ	المبرّراتُ
(1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ وَ $\overline{BC} \cong \overline{DA}$	(1) معطًى.
(2) $\overline{AC}$	(2) ضلعٌ مشتركٌ.
(3) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	(3) SSS
(4) $\angle 1 \cong \angle 4$ وَ $\angle 3 \cong \angle 2$	(4) زوايا متناظرةٌ في مثلثَينِ متطابقَينِ.
(5) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ وَ $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	(5) عكسُ نظريةِ الزاويتَينِ المتبادلتَينِ داخليًّا.
(6) $ABCD$ متوازي أضلاعٍ	(6) تعريفُ متوازي الأضلاعِ.





أتحققُ من فهمي:

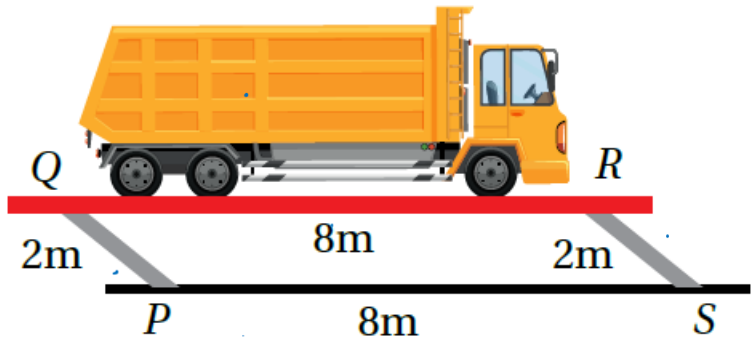
في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $\angle D \cong \angle B, \angle C \cong \angle A$ فأثبتُ أنَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.



يمكنُ استعمالُ شروطِ متوازي الأضلاعِ لتوضيحِ علاقاتٍ مِنْ واقعِ الحياةِ.

مثال 2: منَ الحياةِ

رافعةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ رافعةً للمركباتِ الثقيلةِ:



1. هَلِ الشكلُ الرباعيُّ $QRSP$ متوازي أضلاعٍ؟ أبرّرُ إجابتي.

بِما أنَّ كلَّ ضلعَينِ متقابلَينِ في الشكلِ الرباعيِّ $QRSP$ متطابقانِ، فإنَّهُ متوازي أضلاعٍ.

كل ضلعين متقابلين متطابقين
فهو متوازي أضلاع

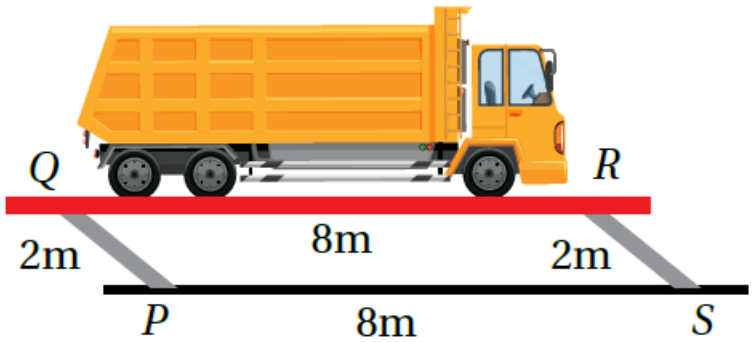
$\overline{QR} \cong \overline{PS}$
$\overline{QP} \cong \overline{RS}$

2. هَلِ الشاحنةُ موازيةٌ للأرضِ؟ أبرّرُ إجابتي.

الشاشة $\parallel$ QR
$QR \parallel PS$ ← الأرض
الأرض $\parallel$ الشاشة

أتحققُ من فهمي:

3 ما أقصى ارتفاعٍ يمكنُ أَنْ ترفعَ الرافعةُ الشاحنةَ إليهِ؟ أبرّرُ إجابتي.



عندما يكون $PS \perp DM$ و $RS \perp DM$

$QP \perp DM$

أقصى ارتفاع 2m

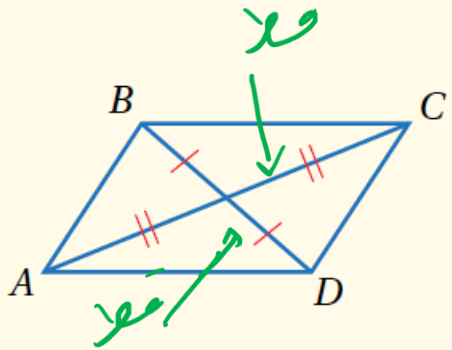
لأن QP إذا اتخذت طولها ثابت لا يتغير ويكن الساقة الأخرى عندما يكونا عمودي

نظريات

شروطُ متوازي الأضلاعِ (2)

- عكسُ نظريةِ قُطرَيْ متوازي الأضلاعِ

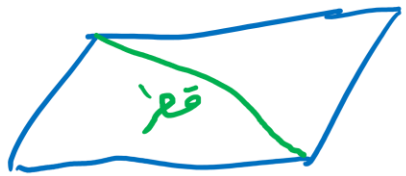
إذا كانَ قُطرا شكلٍ رباعيٍّ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ، فإنَّ الشكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ.

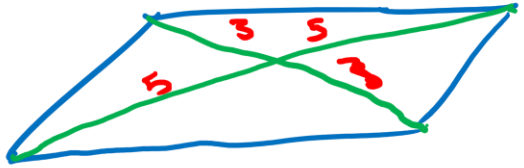


مثالٌ: إذا كانَ $\overline{AC}$ وَ $\overline{BD}$ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخرَ، فإنَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.

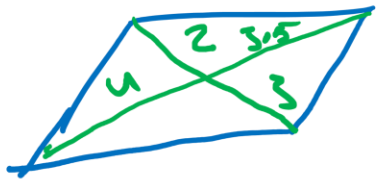
خاصية النتيجة ← متوازي الأضلاع

قطراه ينصفان بعضهما



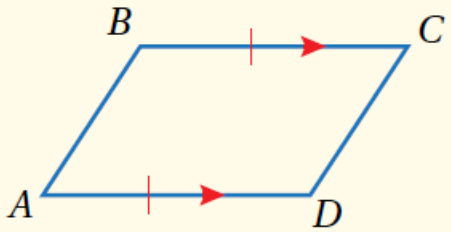


متوازي أضلاع (لأن قطريه ينصفان بعضهما)



ليس متوازي أضلاع

- **نظريةُ الأضلاعِ المتوازيةِ والمتطابقةِ**



إذا تــوازى وتطابقَ ضلعانِ متقابلانِ في شــكلٍ رباعيٍّ، فإنَّ الشــكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ.

مثالٌ: إذا كانَ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ وَ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ فإنَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.

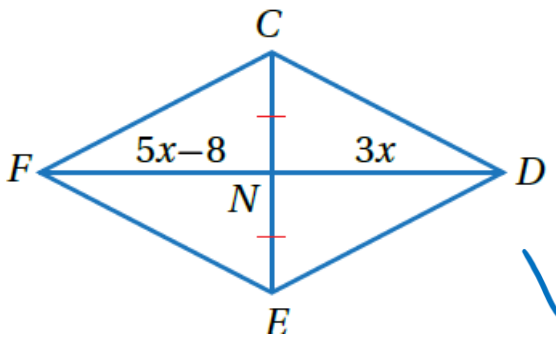
النتيجة

كل ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان ⟸ متوازي الأضلاع

يمكنُ استعمالُ شروطِ متوازي الأضلاعِ لإيجادِ القِيَمِ المجهولةِ الّتي تجعلُ الشكلَ الرباعيَّ متوازيَ أضلاعٍ.

مثال 3

أجدُ قيمةَ x الّتي تجعلُ الشكلَ الرباعيَّ $FCDE$ المجاورَ متوازيَ أضلاعٍ.



لأ

متوازي أضلاع ← القطران ينصفان بعضهما

$5x - 8 = 3x$

$-3x \quad -3x$

$2x - 8 = 0$

$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$

$x = 4$

التحقق

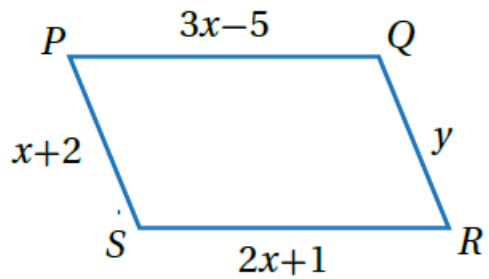
$5(4) - 8 \stackrel{?}{=} 3(4)$

$20 - 8 \stackrel{?}{=} 12$

$12 = 12$ ✓

أتحققُ من فهمي:

أجدُ قيمتَيْ x وَ y اللّتَينِ تجعلانِ الشكلَ الرباعيَّ $PQRS$ المجاورَ متوازيَ أضلاعٍ.



متوازي الاضلاع

كل ضلعين متقابلين متطابقان

$\overline{PS} \cong \overline{QR}$

$x+2 = y$

$6+2 = y$

$y = 8$

$\overline{PQ} \cong \overline{SR}$

$3x-5 = 2x+1$

$-2x \quad -2x$

$x-5 = 1$

$+5 \quad +5$

$x = 6$

ملخَّصُ المفهومِ

طرائقُ إثباتِ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ

يكونُ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ إذا حقّقَ أيًّا مِنَ الشروطِ الآتيةِ:

1) إذا كانَ كلُّ ضلعَينِ متقابلَينِ فيهِ متوازيَينِ. (التعريفُ).

2) إذا كانَ كلُّ ضلعَينِ متقابلَينِ فيهِ متطابقَينِ. (عكسُ نظريةِ الأضلاعِ المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ).

3) إذا كانَتْ كلُّ زاويتَينِ متقابلتَينِ فيهِ متطابقتَينِ. (عكسُ نظريةِ الزوايا المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ).

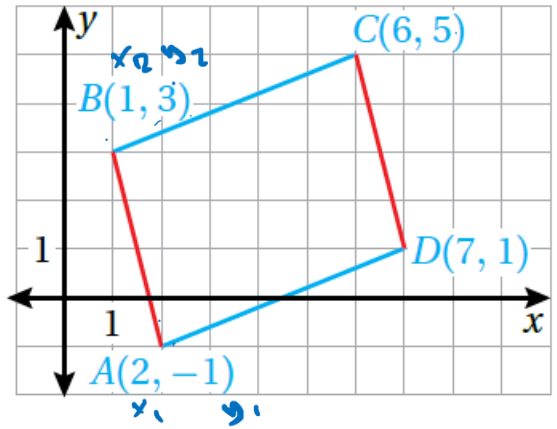
4) إذا كانَ قُطراهُ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ. (عكسُ نظريةِ قُطرَيْ متوازي الأضلاعِ).

5) إذا كانَ فيهِ ضلعانِ متقابلانِ متوازيانِ ومتطابقانِ. (نظريةُ الأضلاعِ المتوازيةِ والمتطابقةِ).

يمكنُ استعمالُ المَيلِ لتحديدِ ما إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ في المستوى الإحداثيِّ متوازيَ أضلاعٍ أَمْ لا.

مثال 4

أثبتُ أنَّ $A(2, -1), B(1, 3), C(6, 5), D(7, 1)$ تمثّلُ رؤوسَ متوازي أضلاعٍ.



$$m_{AB} = \frac{3 - (-1)}{1 - 2} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$m_{CD} = \frac{5 - 1}{6 - 7} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$m_{BC} = \frac{5 - 3}{6 - 1} = \frac{2}{5}$$

$$m_{AD} = \frac{1 - (-1)}{7 - 2} = \frac{2}{5}$$

$AB \parallel CD$

$BC \parallel AD$

بما أنَّ كلَّ ضلعينِ متقابلينِ متوازيانِ فالشكلُ متوازي أضلاعٍ.

أتحققُ من فهمي:

أثبتُ أنَّ $A(-3, 3), B(2, 5), C(5, 2), D(0, 0)$ تمثلُ رؤوسَ متوازي أضلاعٍ.

$$m_{AB} = \frac{5-3}{2-(-3)} = \frac{2}{5}$$

$$m_{BC} = \frac{2-5}{5-2} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$m_{CD} = \frac{0-2}{0-5} = \frac{-2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$m_{AD} = \frac{0-3}{0-(-3)} = \frac{-3}{3} = -1$$

$m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow AB \parallel CD$

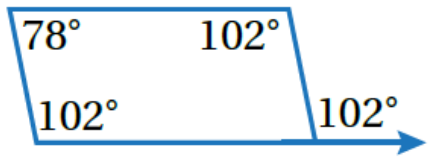
$m_{BC} = m_{AD} \Rightarrow BC \parallel AD$

بما أن كل ضلعين متقابلين متوازيان فإنه متوازي أضلاع

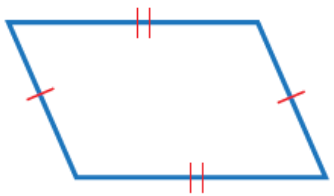
أتدرب وأحل المسائل

أبيّنُ أنَّ كلَّ شكلٍ مِنَ الأشكالِ الرباعيةِ الآتيةِ متوازي أضلاعٍ، وأبرّر إجابتي:

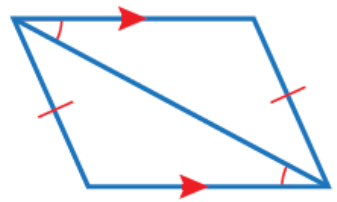
1



2

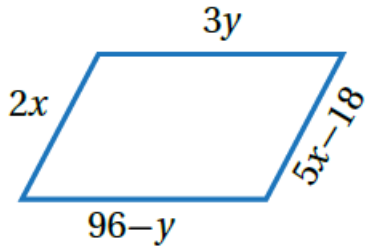


3

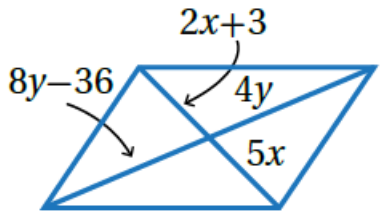


أجدُ قيمتَيْ x وَ y اللّتَينِ تجعلانِ كلَّ شكلٍ رباعيٍّ ممّا يأتي متوازيَ أضلاعٍ:

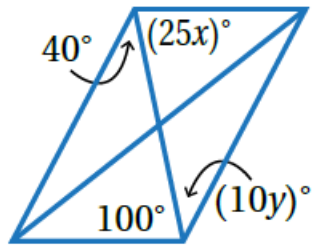
4



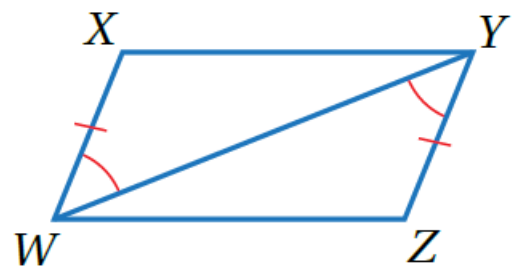
5



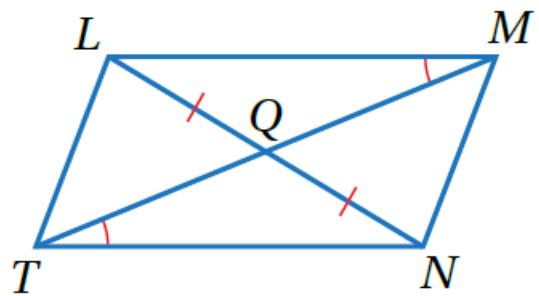
6



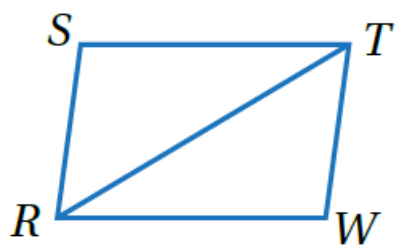
7 أســتعملُ المعلومــاتِ المعطاةَ في الشــكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ الشــكلَ الرباعيَّ $XYZW$ متوازي أضلاعٍ.



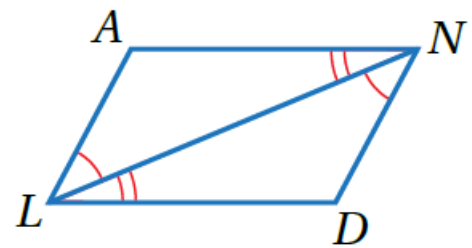
8 أســتعملُ المعلومــاتِ المعطاةَ في الشــكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ الشــكلَ الرباعيَّ $LMNT$ متوازي أضلاعٍ.

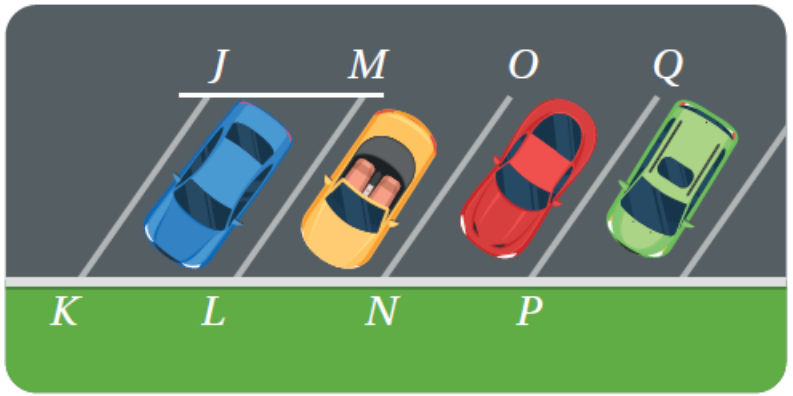


9 في الشكلِ الآتي، إذا كانَ $\triangle RTW \cong \triangle TRS$، فأثبتُ أنَّ $RSTW$ متوازي أضلاعٍ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



10 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ $ANDL$ متوازي أضلاعٍ.





موقــفُ ســيّاراتٍ: يبيّــنُ الشــكلُ المجــاورُ موقفًا للســيّاراتِ. إذا كانَ $JK = LM = 7\ \text{m}$ وَ $m\angle JKL = 60°$ وَ $KL = JM = 3\ \text{m}$

11 هَلِ الجزءُ مِنَ الموقفِ $JKLM$ متوازي أضلاعٍ؟ أبرّرُ إجابتي.

12 أجدُ كلًّا مِنْ: $m\angle JML,\ m\angle KJM,\ m\angle KLM$

13

حاسوبٌ: تسمحُ معالِجاتُ نصوصٍ حاسوبيةٌ عدةٌ بكتابةِ الكلمةِ بالخطِّ العاديِّ أَوِ الخطِّ المائلِ.

هَلْ حرفُ (I) متوازي أضلاعٍ؟ أبرّرُ إجابتي.

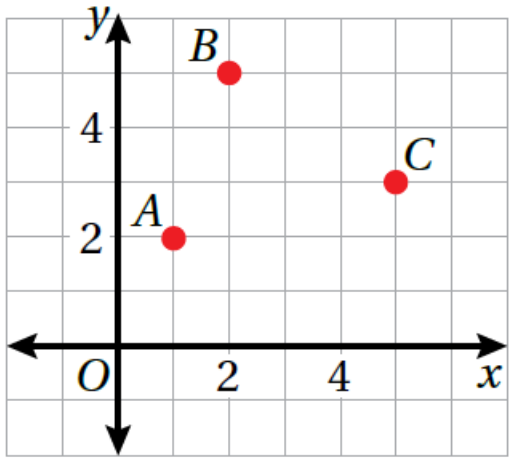
أمثّلُ في المستوى الإحداثيِّ الشكلَ الرباعيَّ المعطاةَ إحداثياتُ رؤوسِهِ في ما يأتي، وأحدّدُ ما إذا كانَ متوازيَ أضلاعٍ أَمْ لا، وأبرّر إجابتي:

14 $B(-6, -3), C(2, -3), E(4, 4), G(-4, 4)$

15 $Q(-3, -6), R(2, 2), S(-1, 6), T(-5, 2)$

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تبريرٌ: تمثلُ النقاطُ A, B, C في المستوى الإحداثيِّ المجاورِ رؤوسَ شكلٍ رباعيٍّ، أجدُ إحداثياتِ النقطةِ الرابعةِ في كلٍّ مِنَ الحالاتِ الآتيةِ، وأبرّر إجابتي:



16 النقطةُ D حيثُ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.

17 النقطةُ E حيثُ $ABEC$ متوازي أضلاعٍ.

إرشادٌ

أبدأُ بإثباتِ أنَّ