الدرسُ 2 متوازي الأضلاعِ

فكرةُ الدرسِ

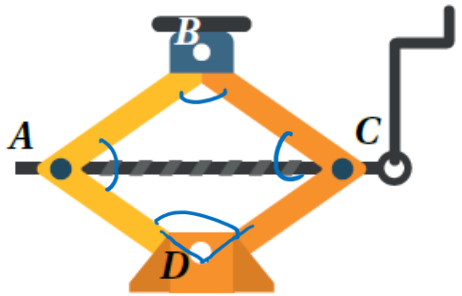
أتعــرّفُ خصائصَ أضــلاعِ وزوايا وأقطارِ متوازي الأضلاعِ.

المصطلحاتُ

متوازي الأضلاعِ، الزوايا المتحالفةُ

أستكشفُ

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ رافعةَ سيّاراتٍ:

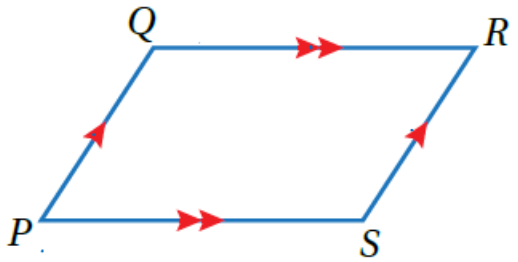


1) ما اسمُ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$؟

2) ما العلاقةُ بَيْنَ $\angle A$ وَ $\angle C$؟

3) ما العلاقَةُ بَيْنَ $\angle B$ وَ $\angle D$؟

متوازي الأضلاعِ (parallelogram) هوَ شــكلٌ رباعيٌّ فيهِ كلُّ ضلعَينِ متقابلَينِ متوازيانِ، ويُرمَزُ إليهِ بالرمزِ ▱



PQ ∥ SR
QR ∥ PS

فَفي ▱$QRSP$ المبيَّنِ جانبًا $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$ وَ $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ بحسبِ التعريفِ.

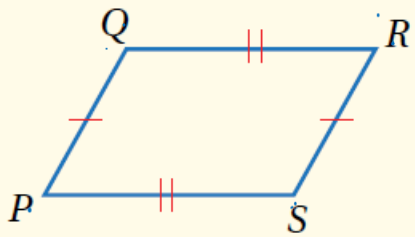
وتقدّمُ النظرياتُ الآتيةُ خصائصَ أُخرى لمتوازي الأضلاعِ.

نظرياتٌ

خصائصُ متوازي الأضلاعِ (1)

- نظريةُ الأضلاعِ المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ

إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ الأضلاعَ المتقابلةَ متطابقةٌ.



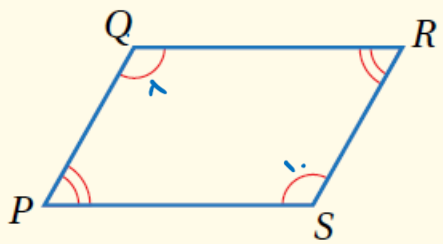
مثالٌ: إذا كانَ $PQRS$ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ $\overline{PQ} \cong \overline{SR}, \overline{QR} \cong \overline{PS}$

$PQ = 7\text{cm} \Rightarrow SR = 7\text{cm}$

$QR = 12\text{cm} \Rightarrow PS = 12\text{cm}$

- **نظريةُ الزوايا المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ**

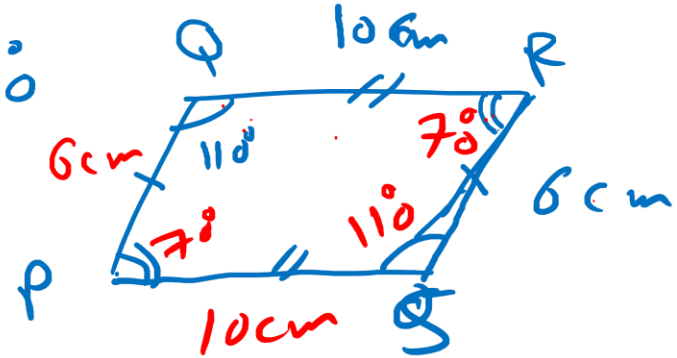
إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ الزوايا المتقابلةَ متطابقةٌ.



مثالٌ: إذا كانَ $PQRS$ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ $\angle P \cong \angle R, \angle Q \cong \angle S$

$m\angle Q = 120^\circ$ وبما $m\angle S = 120^\circ$

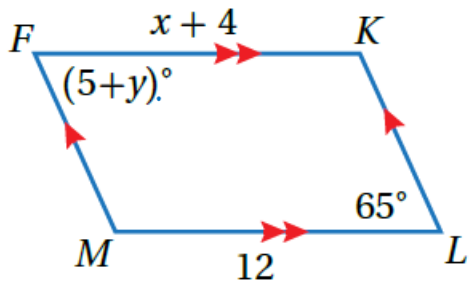
$m\angle R = 60^\circ$ فإن $m\angle P = 60^\circ$



يمكنُ استعمالُ الخصائصِ السابقةِ لمتوازي الأضلاعِ لإيجادِ قِيَمٍ مجهولةٍ.

مثال 1

أجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.



بِما أَنَّ كلَّ ضلعَينِ متقابلَينِ متوازيانِ في الشكلِ الرباعيِّ $FKLM$ فإنَّهُ متوازي أضلاعٍ، ومنهُ فإنَّهُ يمكنُني استعمالُ **نظريةِ الأضلاعِ المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ** لإيجادِ قيمةِ x.

$\overline{FK} \cong \overline{ML}$

$x+4 = 12$

$-4 \quad -4$

$x = 8$

$m\angle F \cong m\angle L$

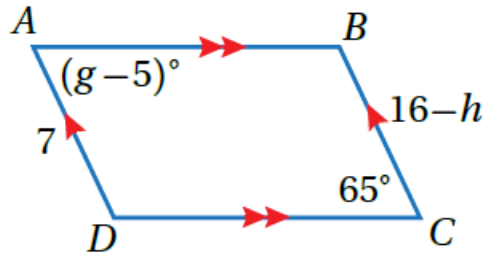
$5+y = 65$

$-5 \quad -5$

$y = 60°$

أتحققُ من فهمي:

أجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ g وَ h في الشكلِ المجاورِ.



$\overline{BC} \cong \overline{AD}$

$16-h = 7$

$-16 \quad -16$

$-h = -9$

$h = 9$

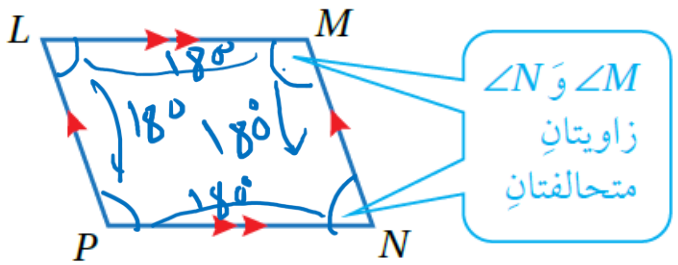
$m\angle A \cong m\angle C$

$g-5 = 65$

$+5 \quad +5$

$g = 70$

تُسمّى زوايا المضلعِ الّتي تشتركُ في الضلعِ نفسِهِ **زوايا متحالفةً** (consecutive angles). فمثلًا، في الشكلِ المجاورِ $\angle M$ وَ $\angle N$ زاويتانِ متحالفتانِ؛ لأنَّهُما تشتركانُ في الضلعِ $\overline{MN}$.



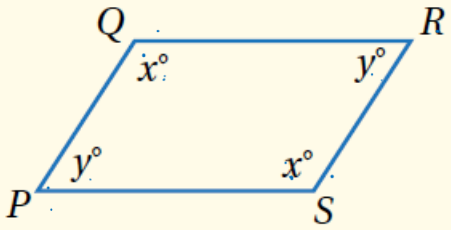
وتقدّمُ النظرياتُ الآتيةُ خصائصَ أُخرى لمتوازي الأضلاعِ تتعلّقُ بالزوايا المتحالفةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

خصائصُ متوازي الأضلاعِ (2)

- **نظريةُ الزوايا المتحالفةِ في متوازي الأضلاعِ**

إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ كلَّ زاويتَينِ متحالفتَينِ متكاملتانِ.



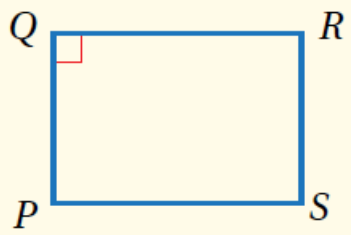
مثالٌ: إذا كانَ $PQRS$ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ $x° + y° = 180°$

- **نظريةُ الزاويةِ القائمةِ في متوازي الأضلاعِ**

إذا كانَتْ إحدى زوايا متوازي الأضلاعِ قائمةً، فإنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

مثالٌ: في $\square PQRS$ إذا كانت $\angle Q$ قائمةً فإنَّ:

$\angle P , \angle S , \angle R$ قوائمُ أيضًا.



كل مربع متوازي أضلاع

كل متوازي أضلاع مستطيل

لماذا؟

لانه ربما تكون الزوايا ليست قائمة

سؤال: هل المستطيل متوازي أضلاع ⟸ الجواب نعم ⟸ لماذا؟

① لانه فيه كل ضلعين متقابلين متقابلان ومتوازيان

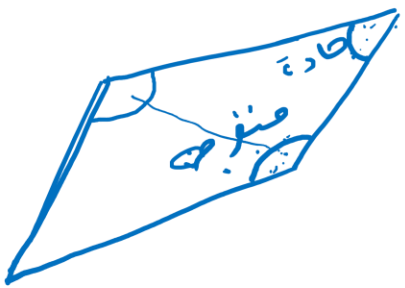
② لان فيه كل زاويتين متقابلتين متقابلتان

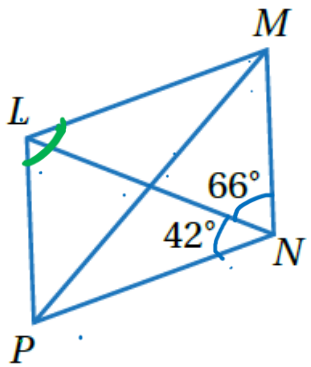
سؤال: هل المربع متوازي أضلاع ⟸ الجواب نعم ⟸ لماذا؟

نفس جواب المستطيل

مثال 2

في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $LMNP$ متوازيَ أضلاعٍ، فأجدُ $m\angle PLM$ وَ $m\angle LMN$

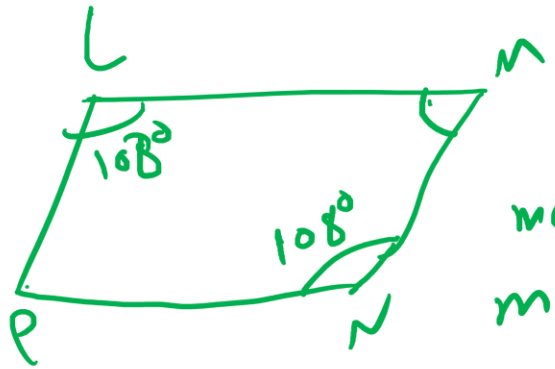




⇒

$m\angle PLM = m\angle PNM = 108^\circ$

- أجدُ $m\angle PLM$



- أجدُ $m\angle LMN$

$m\angle LMN + m\angle MNP = 180^\circ$

$m\angle LMN + 108^\circ = 180^\circ$

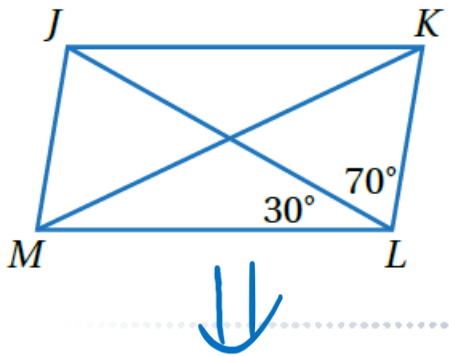
$-108 \quad -108$

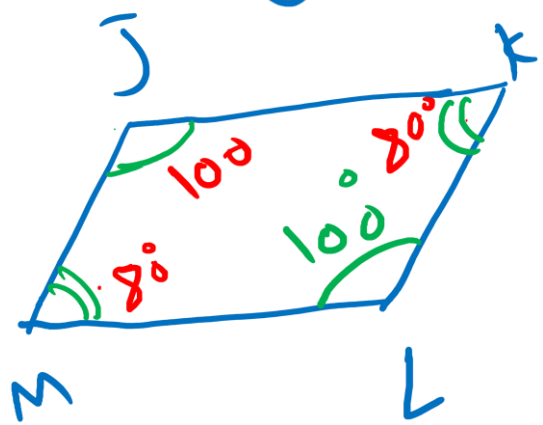
$m\angle LMN = 72^\circ$

لأنهما متكاملتان أي أن مجموعهما 180°

أتحققُ من فهمي:

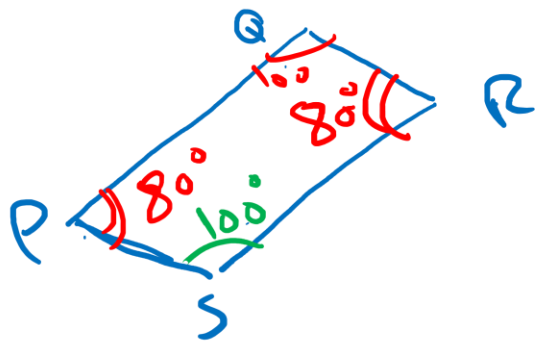
في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $JKLM$ متوازيَ أضلاعٍ، فأجدُ $m\angle MJK$ وَ $m\angle JKL$





مثال 3: منَ الحياةِ

إضاءةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ جزءًا مِنْ مصباحِ مكتبٍ على شكلِ متوازي أضلاعٍ، وتتغيرُ زواياهُ عندَ رفعِهِ وخفضِهِ. أجدُ $m\angle QRS$ إذا علمْتُ أنَّ $m\angle PSR = 100°$

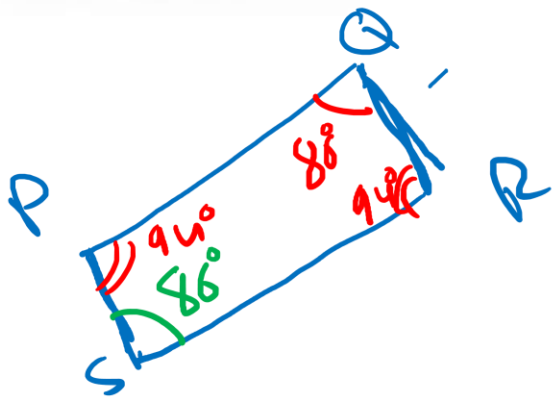


$m\angle QRS + 100° = 180°$

$m\angle QRS = 80°$

أتحققُ من فهمي:

أفترضُ أنَّ مصباحَ المكتبِ عُدِّلَ لتصبحَ $m\angle PSR = 86°$، أجدُ $m\angle QRS$



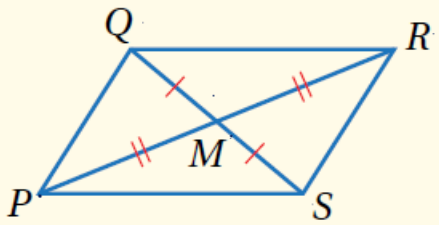
تعلّمْتُ في الأمثلةِ السابقةِ خصائصَ متوازي الأضلاعِ المتعلّقةَ بأضلاعِهِ وزواياهُ، وهناكَ أيضًا بعضُ الخصائصِ المتعلّقةِ بقُطرَيهِ.

نظريات

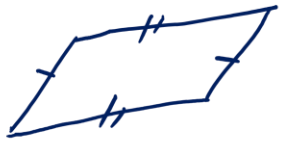
قُطرا متوازي الأضلاعِ

- **نظريةُ قُطرَيْ متوازي الأضلاعِ**

إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ قُطرَيهِ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ.



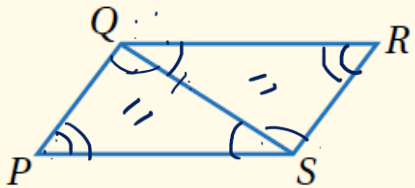
مثالٌ: إذا كانَ $PQRS$ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ $\overline{QM} \cong \overline{SM}$, $\overline{PM} \cong \overline{RM}$



مثال: إذا كان $\overline{QM} = 3$ فإن $\overline{MS} = 3$ سم

$\overline{PR} = 12$ فإن $MR = 6$ cm

- **نظريةُ قُطرِ متوازي الأضلاعِ**

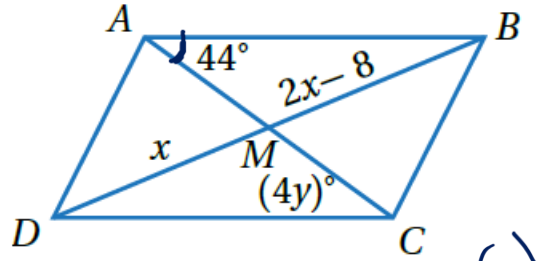


إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ كلَّ قُطرٍ يقسمُهُ إلى مثلثَينِ متطابقَينِ.

مثالٌ: إذا كانَ $PQRS$ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ $\Delta PQS \cong \Delta RSQ$

مثال 4

إذا كانَ $ABCD$ متوازيَ أضلاعٍ، فأجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y



- أجدُ قيمةَ x

بما أن القطرين قطري متوازي الأضلاع ينصف بعضهما

$\overline{DM} = \overline{MB}$

$x = 2x - 8$

$2x - x = 8$

$x = 8$

التحقق

$x \stackrel{?}{=} 2x - 8$

$8 \stackrel{?}{=} 2(8) - 8$

$8 = 8$ ✓

- أجدُ قيمةَ y

$m\angle BAC = m\angle ACD$

$44 = 4y$

$\frac{44}{4} = \frac{4y}{4}$

$y = 11$

التحقق

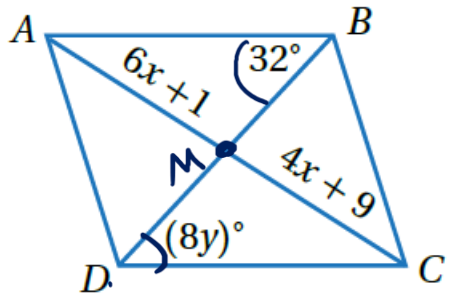
$44 = 4y$

$44 \stackrel{?}{=} 4(11)$

$44 = 44$ ✓

أتحققُ من فهمي:

إذا كانَ $ABCD$ متوازيَ أضلاعٍ، فأجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y



من نظرية متوازي الأضلاع ← ينصفان بعضهما

$\overline{AM} = \overline{MC}$

$6x + 1 = 4x + 9$

$6x - 4x = 9 - 1$

$2x = 8$

$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$

$x = 4$

التحقق $6(4) + 1 \stackrel{?}{=} 4(4) + 9$

$25 = 25$ ✓

(1) لأن متبادلة

$m\angle ABD = m\angle BDC$

$32 = 8y$

$\frac{32}{8} = \frac{8y}{8}$

$y = 4$

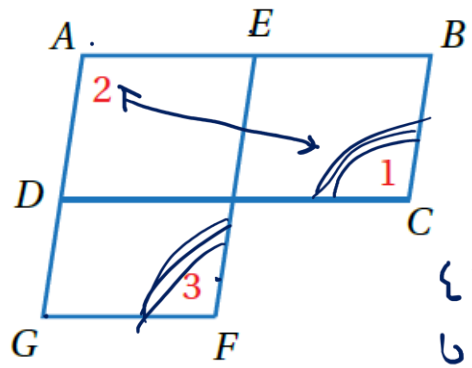
التحقق $32 \stackrel{?}{=} 8(4)$

$32 = 32$ ✓

يمكنُ استعمالُ خصائصِ متوازي الأضلاعِ لبرهنةِ علاقاتٍ في أشكالٍ هندسيةٍ مركّبةٍ.

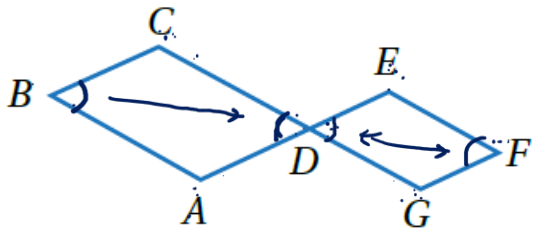
مثال 5

في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $ABCD$ وَ $AEFG$ متوازيَيْ أضلاعٍ، فأثبتُ أنَّ $\angle 3 \cong \angle 1$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



العباراتُ	المبرّراتُ
1) $ABCD$ وَ $AEFG$ متوازيا أضلاعٍ	1) معطًى.
2) $\angle 1 \cong \angle 2$	2) الزوايا المتقابلةُ في متوازي الأضلاعِ متطابقةٌ.
3) $\angle 2 \cong \angle 3$	3) الزوايا المتقابلةُ في متوازي الأضلاعِ متطابقةٌ.
4) $\angle 1 \cong \angle 3$	4) بما أنَّ $\angle 2 \cong \angle 1$ وَ $\angle 3 \cong \angle 2$

أتحققُ من فهمي:



في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $ABCD$ وَ $GDEF$ متوازيَيْ أضلاعٍ، فأثبتُ أنَّ $\angle B \cong \angle F$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

العبارات	المبررات
$GDFE$ ، $ABCDE$ متوازيا أضلاع	معطى
$\angle B \cong \angle CDA$	متقابلتان في متوازي الأضلاع
$\angle CDA \cong \angle EDG$	متقابلتان بالرأس
$\angle B \cong \angle F$	بالتعويض

$\angle B \cong \angle D$ متقابلتان ← $\angle CDE \cong \angle EDG$ متقابلتان بالرأس

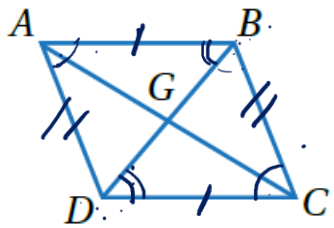
النتيجة

$\angle CDE$ or $(\angle D)$

$\angle EDG \cong \angle EFG$ (or $\angle F$) متقابلتان في متوازي الأضلاع

أتدرب وأحل المسائل

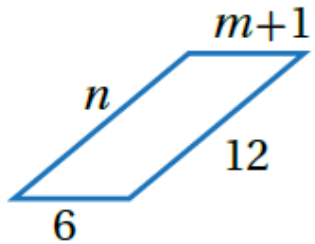
أكملُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي في ما يتعلّقُ بِـ $\square ABCD$ وأبرّر إجابتي:



1. $\angle DAB \cong$ ...$\angle BCD$... (متقابلتان)
2. $\angle ABD \cong$ ...$\angle BDC$...
3. $\overline{AB} \parallel$ ...$\overline{DC}$... (بالبناء)
4. $\overline{BC} \parallel$ ...$\overline{AD}$...
5. $\Delta ABD \cong$ ...ΔCDB...
6. $\Delta ACD \cong$ ...ΔABC...

أجدُ قيمةَ كلِّ متغيّرٍ في كلٍّ مِنْ متوازياتِ الأضلاعِ الآتيةِ:

7



$n = 12$ ✓

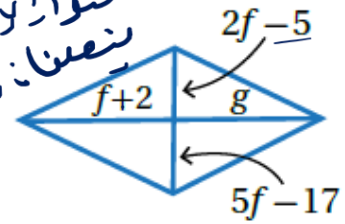
$m + 1 = 6$

$-1 \quad -1$

$m = 5$ ✓

8

قطرا متوازي الأضلاع ينصفان بعضهما



$2f - 5 = 5f - 17$

$-2f \quad -2f$

$-5 = 3f - 17$

$+17 \quad +17$

$3f = 12$

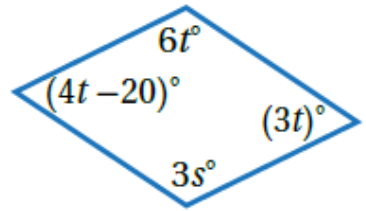
$\frac{3}{3}f = \frac{12}{3}$

$f = 4$

$g = f + 2$

$g = 4 + 2 = 6$

9



كل زاويتين متقابلتين متطابقتان

$4t - 20 = 3t$

$-3t \quad -3t$

$t - 20 = 0$

$t = 20$

$3S = 6t$

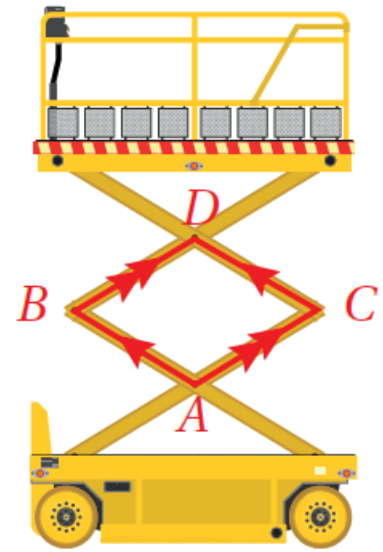
$3S = 6(20)$

$3S = 120$

$\frac{3}{3}S = \frac{120}{3}$

$S = 40$

رافعةٌ: أستعملُ الشكلَ المجاورَ الّذي يبيّنُ رافعةَ المِقصِّ للإجابةِ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



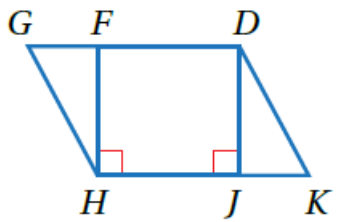
10 إذا كانَ $m\angle A = 120°$، فأجدُ $m\angle B$.

11 إذا قلَّ $m\angle A$، فَما تأثيرُ ذلكَ في $m\angle B$؟

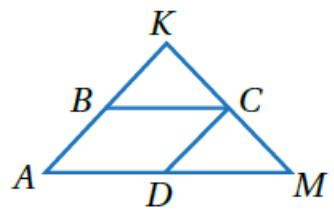
12 إذا قلَّ $m\angle A$، فَما تأثيرُ ذلكَ في طولِ $\overline{AD}$؟

13 إذا قلَّ $m\angle A$، فَما تأثيرُ ذلكَ في ارتفاعِ الرافعةِ؟

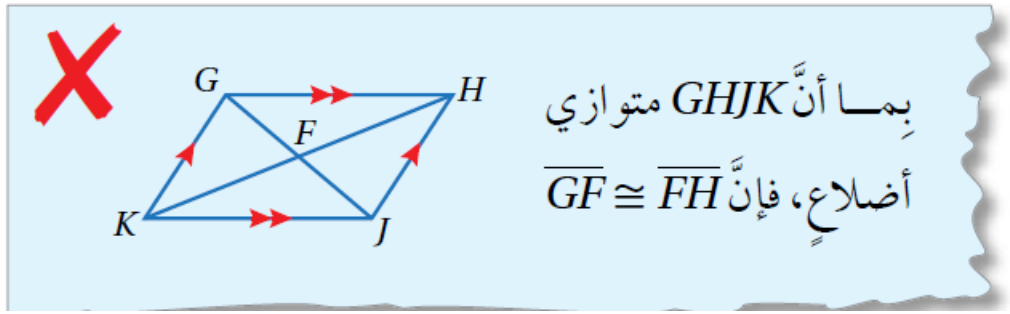
14 في الشكلِ الآتي، إذا كانَ $GDKH$ متوازيَ أضلاعٍ، فأستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ على الشكلِ؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta DJK \cong \Delta HFG$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



15 في الشكلِ الآتي، إذا كانَ $ABCD$ متوازيَ أضلاعٍ وَ $\overline{AK} \cong \overline{MK}$، فأثبتُ أنَّ $\angle BCD \cong \angle CMD$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



16 **أكتشفُ الخطأَ:** أنظرُ الحلَّ الآتِيَ، وأكتشفُ الخطأَ الواردَ فيهِ، وأصحّحُهُ.



بِمـــا أنَّ $GHJK$ متوازي أضلاعٍ، فإنَّ $\overline{GF} \cong \overline{FH}$

أتذكّرُ

المحيطُ يُساوي مجموعَ أطوالِ الأضلاعِ.

17 **تبريرٌ:** تمثّلُ المقاديرُ الجبريةُ أدناهُ أطوالَ أضلاعِ $\square MNPQ$. أجدُ محيطَ متوازي الأضلاعِ، وأبرّر إجابتي.

$MN = 4y + 5$ $NP = x - 5$ $QP = y + 14$ $MQ = -2x + 37$